Dadurch ist gewährleistet, daß eine Messung an einem physikalischen System dieses nicht in einen Zustand, dem ein Element in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{S}'$ (Komplement von $\mathfrak{S}'$ inerehalb $\mathfrak{S}$) zugeordnet ist, bringen kann, d. h.

$$A_m \,|\, \varphi_k\rangle = |\, \varphi_l\rangle \quad \text{mit } \varphi_l \text{ in } \mathfrak{S}', \text{ sofern } \varphi_k \text{ in } \mathfrak{S}'.$$

Nunmehr werde in $\mathfrak{S}'$ der Unterraum $\mathfrak{N}'$ der Nullvektoren, der (nach Satz 2, Teil II, § 3 c) mit $\mathfrak{D}'$, dem Raum der auf allen Vektoren von $\mathfrak{S}'$ senkrecht stehenden Vektoren identisch ist, betrachtet. Auch falls $\mathfrak{D}$ leer war, braucht der Unterraum von $\mathfrak{D}'$ durchaus nicht leer zu sein, er setzt sich aus den ersten Teilräumen, die von den unter III), IVa) und IVb) aufgeführten Darstellungsräumen zu $\mathfrak{S}'$ geschlagen wurden, zusammen. Jedes φ_k in $\mathfrak{S}'$ läßt sich schreiben:

$$\varphi_k = \hat{\varphi}_k + \hat{\hat{\varphi}}_k ,$$

wobei $\hat{\hat{\varphi}}_k$ in $\mathfrak{D}'$, $\hat{\varphi}_k$ in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}'$ (mit $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}'$ Komplement von $\mathfrak{D}'$ innerhalb $\mathfrak{S}'$) liegen. Für die Matrixelemente eines Operators A_m erhält man

$$\langle \varphi_i \,|\, A_m \,|\, \varphi_k\rangle = \langle \hat{\hat{\varphi}}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\hat{\varphi}}_k\rangle + \langle \hat{\varphi}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\hat{\varphi}}_k\rangle + \langle \hat{\hat{\varphi}}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\varphi}_k\rangle + \langle \hat{\varphi}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\varphi}_k\rangle .$$

Die ersten drei Glieder rechts fallen weg, so daß $\langle \varphi_i \,|\, A_m \,|\, \varphi_k\rangle = \langle \hat{\varphi}_i \,|\, A_m \,|\, \hat{\varphi}_k\rangle$ wird. Zu den Erwartungswerten tragen also nur die Komponenten in $\mathfrak{C}(\mathfrak{D}')$ bei.

Man ändert nichts an dem physikalischen Gehalt, wenn man von $\mathfrak{S}'$ zum Quotientenraum $\mathfrak{S}'/\mathfrak{D}' = \mathfrak{S}''$ übergeht, indem man jedes Element φ_k von $\mathfrak{S}'$ auf $\hat{\varphi}_k$ von $\mathfrak{S}''$ abbildet.

$\mathfrak{S}''$ ist ein Raum, der eine definite Metrik trägt und auf dem die Transformationsgruppen unitäre Darstellungen induzieren. Er kann daher als Raum, dessen Elementen physikalische Systeme zugeordnet sind, verwendet werden, ohne daß man mit der Wahrscheinlichkeitsinterpretation in Widerspruch gerät.

Bemerkungen über die kanonischen Energie-Pseudotensoren der allgemein-kovarianten Wellenfeldtheorien

Von GÉZA KNAPECZ *

(Z. Naturforschg. **15 a**, 467—470 [1960]; eingegangen am 16. Juni 1959)

Es wird mit Hilfe allgemeingültiger Argumente gezeigt, daß man den starken und schwachen kanonischen Energie-Pseudotensor eines beliebigen allgemein kovarianten Wellenfeldes unabhängig von seinem schlechten Transformationscharakter nicht als den Vertreter der Energie deuten kann.

In der allgemein-kovarianten LAGRANGE-Theorie beliebiger Wellenfelder kann man drei Ausdrücke ableiten, die als Veretreter der Energie in Betracht kommen:

a) den kovarianten Quellentensor des Gravitationsfeldes T_i^k $(i, k = 0, 1, 2, 3)$,
b) den starken nichtkovarianten kanonischen Pseudotensor Θ_i^k, und
c) den schwachen nichtkovarianten kanonischen Pseudotensor ϑ_i^k.

Im Vergleich mit dem Energietensor t_i^k der affinkovarianten Theorien verhalten sich diese Größen folgendermaßen. T_i^k transformiert sich als ein Tensor; er hat einen invarianten Sinn; für ihn gilt eine kovariante Pseudokontinuitätsgleichung $T_i{}^k{}_{:k} = 0$; er ist aber zu einem Gesamtenergieimpuls nicht integrabel. Θ_i^k und ϑ_i^k transformieren sich nicht wie Tensoren; sie sind deswegen koordinatenabhängig („Scheingrößen"); für sie gilt je eine nichtkovariante Kontinuitätsgleichung $\Theta_i{}^k{}_{,k} = 0$ und $\vartheta_i{}^k{}_{,k} = 0$, und je ein Integralerhaltungssatz $\oint \Theta_i^k \, d^3x_k = 0$ und $\oint \vartheta_i^k \, d^3x_k = 0$; sie sind zu einem Gesamtpseudoenergieimpuls integrabel, aber die gewonnenen Integrale $\int \Theta_i^k \, d^3x_k$ und $\int \vartheta_i^k \, d^3x_k$ transformieren sich im allgemeinen nicht wie Vektoren.

Also weder T_i^k, noch Θ_i^k und ϑ_i^k besitzen alle Eigenschaften des affin-kovarianten Tensors t_i^k. In der Literatur „konkurrieren" noch immer miteinander die kovarianten und nichtkovarianten Ausdrücke als die Vertreter der Energie. Zum Beispiel läßt sich nach LANDAU und LIFŠIC [1] $T_i{}^k{}_{:k} = 0$ nicht als Energieerhaltung deuten. Dagegen vertritt DIRAC [2] die Ansicht, daß man einen befriedigenden Energiepseudotensor nicht finden kann.

* G. KNAPECZ, Postfach 20. Budapest 112, Ungarn.

[1] L. LANDAU u. E. LIFŠIC, Teorija polja, Moskva 1948, S. 328.

[2] P. A. M. DIRAC, Phys. Rev. (Lett.) **2**, 368 [1959].

In dieser Notiz möchten wir zwei von dem nichtkovarianten Transformationscharakter und den Arbeiten [3] unabhängige Argumente angeben, die der Auffassung, daß Θ_i^k oder ϑ_i^k als Energieimpulsdichte deutbar seien, entgegenstehen.

1. Zusammenfassung

In den folgenden Punkten wird einerseits gezeigt, daß im Falle eines nichtabgeschlossenen Systems, in dem $T_i^k{}_{;k} \neq 0$ ist, für den Θ_i^k und ϑ_i^k doch je ein Erhaltungssatz $\Theta_i^k{}_{,k} = 0$ und $\vartheta_i^k{}_{,k} = 0$ gültig ist. Dieses Verhalten ist von einer „guten" Energie nicht zu erwarten.

Andererseits wird gezeigt, daß im Falle solcher LAGRANGE-Funktionen L, die in mehrere skalare Teile zerlegbar sind,

$$L = \sum_{l=1}^{N} L_l ,$$

insgesamt N Erhaltungssätze

$$\Theta_i^k(L_l)_{,k} = 0 \quad \text{oder} \quad \oint \Theta_i^k(L_l)\, \mathrm{d}^3x_k = 0$$

statt eines Satzes gültig sind. Der Erhaltungssatz „entartet". Dieses Verhalten bedeutet, daß sich in einem System N Energien ergeben, die miteinander in keiner Wechselwirkung stehen, weil jede Energie für sich erhalten bleibt. Die Entartung ist eine Eigenschaft, die man von einer guten und brauchbaren Energie nicht erwarten darf.

2. Die Entartung der Pseudogrößen

Für die Ableitung dieser unerwünschten Eigenschaft müssen wir zwischen „zerlegbaren" und „nichtzerlegbaren" Skalaren unterscheiden.

Die LAGRANGE-Funktion L wird zerlegbar genannt, wenn sie als Summe mehrerer Skalare

$$L = \sum_{l=1}^{N} L_l \tag{1}$$

darstellbar ist. Anderenfalls heiße sie nichtzerlegbar.

Die Unterteilung der Skalarfelder in diese zwei Gruppen ist deswegen notwendig, weil die Gültigkeit der kanonischen Erhaltungssätze $\Theta_i^k(L)_{,k} = 0$ oder $\Theta_i^k(L_l)_{,k} = 0$ aus dem Transformationscharakter der Skalare (L oder L_l) folgt. Aus jedem Skalar, der von Feldfunktionen ψ und g_{mn} abhängig ist, folgen die starken Sätze unabhängig davon, ob der Skalar als LAGRANGE-Funktion betrachtet wird oder nicht. Das soll im folgenden bewiesen werden.

Wenn S ein beliebiges Skalarfeld ist, das von den Feldfunktionen ψ und g_{mn} in beliebiger Weise abhängt, gilt für seine Skalardichte $\varphi = S\sqrt{-g}$ die LIE–NOETHERsche Identität [4, 5]

$$A_{,u} = \frac{\partial A}{\partial x^u} \quad \text{und} \quad A_{,,u} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x^u} = \frac{\partial A}{\partial x^u} + \frac{\partial A}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x^u} + \dots .$$

$$\delta\varphi = -(\varphi\, \xi^u)_{,,u} , \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi_{,u}}\delta\psi_{,u} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial g_{mu}}\delta g_{mn} + \frac{\partial\varphi}{\partial g_{mu,r}}\delta g_{mn,r} + \dots = -(\varphi\,\xi^u)_{,,u} . \tag{3}$$

Die Variationen δg_{mn}, $\delta g_{mn,r}$, ... sind durch den Tensorcharakter des g_{mn} gegeben. Dagegen können wir die Variationen $\delta\psi$ ziemlich beliebig wählen

$$\delta\psi = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha n}^{a_1 a_2 \dots a_\alpha}(\psi, g_{\mu\nu})\, \xi^n_{,a_1 a_2 \dots a_\alpha} . \tag{4}$$

Die Variationen $\delta\psi_{,n}$, $\delta\psi_{,nm}$, ... ergeben sich dann automatisch daraus, daß die bilokale Variation mit der partiellen Ableitung vertauschbar ist.

Nach einer wiederholten Anwendung des bekannten Schemas

$$A\, \xi^n_{,a} = (A\,\xi^n)_{,,a} - \xi^n A_{,,a} \tag{5}$$

läßt sich (2) in folgender Weise darstellen

$$B_n \xi^n + C^i_{,,i} = 0 , \tag{6}$$

wo

$$C^i = C^i[\xi(x)] = \xi^n\,\theta^i_n + \xi^n_{,m}\,\theta^{im}_n\, \xi^n_{,mr}\,\theta^{imr}_n + \dots \tag{7}$$

das erweiterte BERGMANNsche Moment [6] ist.

Wenn man die EULERschen Ableitungen der Gl. (6) nach ξ^n bildet, ergibt sich die BIANCHI–HILBERT–KLEIN-BERGMANNsche Identität

$$B_i = 0 , \qquad i = 0, 1, 2, 3 . \tag{8}$$

Wegen (8) bleibt in (6) der Erhaltungssatz des

[3] E. SCHRÖDINGER, Phys. Z. **19**, 4 [1918]. — H. BAUER, Phys. Z. **19**, 163 [1918].

[4] E. NOETHER, Nachrichten, Göttingen 1918, S. 235, Gl. (11).

[5] $\delta\varphi$ ist die „bilokale" Variation von φ. Sie ist genommen zwischen zwei Punkten, von denen der erste *vor* der infinitesimalen Koordinatentransformation $x' = x + \xi$ dieselben Koordinatenwerte hatte wie der zweite *nach* der Transformation. Betreffs der Bezeichnungsweise sei noch bemerkt, daß wir von jetzt ab zwei partielle Ableitungszeichen anwenden.

[6] P. G. BERGMANN, Phys. Rev. **112**, 287 [1958]. — A. KOMAR, Phys. Rev. **113**, 934 [1959] nennt diese Momente „erweiterte Energien". — G. KNAPECZ, Ann. Phys., Lpz., im Druck.

starken BERGMANNschen Momentes (7) übrig:

$$C^i{}_{,,i} = 0 . \tag{9}$$

Es ist ersichtlich, daß aus jedem Skalarfeld S, unabhängig davon, ob es zu einem LAGRANGE-Formalismus gehört oder nicht, der starke Satz (9), und aus ihm für $\xi^n = \text{const}$ die Erhaltung der starken Pseudoenergie

$$\Theta_i^k(S)_{,,k} = 0 \tag{10}$$

folgt.

Wenn L eine zerlegbare LAGRANGE-Funktion ist,

$$L = \sum_{l=1}^{N} L_l , \tag{11}$$

dann gelten die Gleichungen

$$\Theta_i^k(L) = \sum_{l=1}^{N} \Theta_i^k(L_l) , \tag{12}$$

$$\Theta_i^k(L)_{,,k} = 0 \text{ und } \Theta_i^k(L_l)_{,,k} = 0 , \quad l = 1, 2, \ldots, N . \tag{13}$$

Der Erhaltungssatz (13) der starken Pseudoenergie $\Theta_i^k(L)$ und aller starken BERGMANNschen Momente zerfällt in N Sätze. Das bedeutet aber, daß die Pseudoenergie in mehrere Schichten zerfällt, dieses Verhalten nennen wir „die Entartung des Energiesatzes".

Wegen dieser Entartung kann man weder $\Theta_i^k(L)$ noch die $\Theta_i^k(L_l)$ als die Vertreter der Energie erklären.

In der „reinen" Allgemeinen Relativitätstheorie, in der $L = R$ ist (R = Krümmungsskalar) und keine ψ vorkommen, also L nichtzerlegbar ist, tritt diese Schwierigkeit nicht auf. Aber in der allgemein relativistischen Wellenfeldtheorie muß man mit ihr rechnen.

Zur Lösung dieser Schwierigkeit sollte man entweder nichtzerlegbare LAGRANGE-Funktionen zulassen; oder auf die Deutung der Θ_i^k als Energie verzichten; oder unsere heutigen Vorstellungen über die Energie ändern; oder einen der $\Theta_i^k(L_l)$ gegenüber den anderen auszeichnen und als die Energie erklären.

Unseres Erachtens sollte man den Quellentensor des Gravitationsfeldes als den Vertreter der Energie betrachten. Er ist von dieser Schwierigkeit frei.

3. Die Nichtgeschlossenheit-Anomalie

Für die Ableitung dieses Mangels soll man zwischen Skalar- und Invariantenfeldern unterscheiden. Unter Invarianten, die von ψ und g_{mn} abhängen, verstehen wir jene, ebenfalls von ψ und g_{mn} abhängigen Skalare, die bei den Koordinatentransformationen *auch* ihre mathematische Gestalt beibehalten. Wenn L zum Beispiel auch noch von den Koordinaten explizit abhängt, ist es nur ein Skalar, aber keine Invariante im vorigen Sinne.

Die Anomalie der kanonischen Pseudotensoren gestaltet sich folgendermaßen.

Die bilokale Variation $\bar{\delta} L$ eines Skalars zerfällt in zwei Teile

$$\bar{\delta} L = \delta_f L + \delta_a L , \tag{14}$$

wo $\delta_a L$ durch die Änderung der Argumente und $\delta_f L$ durch die Änderung der funktionalen Gestalt des Skalars L verursacht wird. Es gilt nämlich bei einer infinitesimalen Koordinatentransformation

$$\bar{\delta} L = L'(x) - L(x) . \tag{15}$$

Wenn L seine Gestalt ändert, sind L' und L als Funktionen verschieden. Deswegen ist

$$\begin{aligned} L' - L &= L'[\psi'(x), g'(x)] - L[\psi(x), g(x)] \\ &= L'(\psi', g') - L(\psi', g') + L(\psi', g') - L(\psi, g) . \end{aligned} \tag{16}$$

Es gilt nun (bis auf in ξ lineare Glieder und ihre Ableitungen)

$$\delta_f L = L'(\psi', g') - L(\psi', g') = L'(\psi, g) - L(\psi, g) \tag{17}$$

und[7]

$$\delta_a L = L(\psi', g') - L(\psi, g) . \tag{18}$$

Jetzt sei angenommen, daß das erörterte System nicht abgeschlossen ist. Dann ist $\mathfrak{L} = L\sqrt{-g}$ eine Skalardichte. Die LIE–NOETHERsche Identität lautet in diesem Falle

$$\bar{\delta} \mathfrak{L} = \delta_f \mathfrak{L} + \delta_a \mathfrak{L} = -(\mathfrak{L}\xi^n)_{,,n} , \tag{21}$$

wo

$$\delta_f \mathfrak{L} = -\mathfrak{L}_{,n}\xi^n \neq 0 . \tag{22}$$

Wenn man von der $\delta_f \mathfrak{L}$ absieht, verhalten sich die Dinge wie bei den invarianten LAGRANGE-Funktionen. Also tritt an die Stelle der Gl. (6) die Identität

$$-\mathfrak{L}_{,n}\xi^n + B_n \xi^n + C^m{}_{,,m} = 0 . \tag{23}$$

Durch die Bildung der EULERschen Ableitung dieser Identität nach ξ^n „geht" $\mathfrak{L}_{,n}$ mit B_n zusammen in die BHKB-Identität ein

$$-\mathfrak{L}_{,i} + B_i = 0 \tag{24}$$

[7] Mit diesen Variationen läßt sich der Unterschied zwischen den Skalaren und Invarianten analytisch formulieren. Für die Skalare gilt

$$\delta_f L \neq 0 \tag{19}$$

und für die Invarianten

$$\delta_f L = 0 . \tag{20}$$

und es „bleibt“ allein das starke BERGMANNsche Moment

$$C^{k}{}_{,,k} = 0\,. \tag{25}$$

Die „äußere“ Kraft $\mathfrak{L}_{,k}$ tritt in der Gl. (24) des metrischen Tensors und nicht in der Gl. (25) des Pseudotensors auf! Für den metrischen Tensor ist das System nicht abgeschlossen, wohl aber für die Momente. *Auch jetzt* gilt für die Momente und deswegen auch für die Pseudotensoren die Erhaltung

$$\Theta_i{}^k{}_{,,k} = 0\,. \tag{26}$$

Wir haben aber angenommen, daß unser System nicht abgeschlossen ist. (Wie erwähnt, läßt sich das an der Gl. (24) sehen, die den Pseudoerhaltungssatz für den metrischen Energietensor darstellt, wenn die Bewegungsgleichungen erfüllt sind [8]. Genauer gesagt: in unserem Falle drückt die Gl. (24) eben die Nichterhaltung des metrischen Tensors aus.) Jedoch gilt für $\Theta_i{}^k$ und deswegen bei der Erfüllung der Bewegungsgleichungen auch für $\vartheta_i{}^k$ eine Erhaltung. Darin besteht die Erhaltungsanomalie der kanonischen Pseudotensoren der Energie.

Das ist ihre zweite unerwünschte Eigenschaft allgemeiner Natur, die wir erwähnen wollten. Sie spricht auch gegen die Interpretation der Pseudotensoren als Vertreter der Energie.

Beide schlechten Eigenschaften treten bei dem metrischen Energietensor nicht auf. Deswegen scheint es, daß nur $T_i{}^k$ der richtige Vertreter der Energie in allgemein kovarianten Theorien sein kann.

4. Die schlechteste Folgerung

Die erörterten schlechten Eigenschaften gelten auch im Falle der MINKOWSKIschen Metrik, wenn man krummlinige Koordinaten benutzt. Also können die „krummlinigen“ kanonischen Pseudotensoren $\Theta_i{}^k$ oder $\vartheta_i{}^k$ nicht in eine direkte Beziehung mit der Energie gebracht werden.

Der Vertreter der Energie in krummlinigen Geometrien scheint nur der metrische Tensor zu sein. Eine Ausnahme bilden jene Fälle, in denen der kanonische Tensor gute Transformationseigenschaften besitzt und durch die Symmetrisierung in den metrischen überführbar ist.

[8] F. KLEIN, Nachrichten, Göttingen 1917, S. 469, Gl. (14'). — G. KNAPECZ, Ann. Phys., Lpz., im Druck.

Ergebnisse von Dauerregistrierungen der Kosmischen Strahlung mit Ionisationskammern in Halle ($\varphi = 51{,}5^\circ$ N, $\lambda = 12^\circ$ E)

Von W. MESSERSCHMIDT *

Aus dem Institut für Experimentelle Physik der Universität Halle (Saale)

(Z. Naturforschg. **15 a**, 470—484 [1960]; eingegangen am 1. Februar 1960)

In Halle werden seit dem 1. 4. 1956 mit 4 Ionisationskammern (Abschirmung 140 g/cm²) Dauerregistrierungen der Kosmischen Strahlung durchgeführt. 2 Kammern stehen über der Erde, eine dritte ist in einem offenen Schacht und die vierte unter 14 m Wasseräquivalent aufgestellt. Es werden die verschiedenen Schwankungsgrößen in Abhängigkeit von der Aufstellung der Kammern untersucht. Der Barometereffekt, die FORBUSH-Effekte, die jährliche Periode und die 27-tägige Periode nehmen mit der Tiefe ab. Die tägliche Periode ist unter der Erde prozentual größer als über der Erde. Mit der Kammer im offenen Schacht konnte eine sternzeitliche Periode nachgewiesen werden.

I. Beschreibung der Anlage

Die Anlage besteht aus vier untereinander gleichen Ionisationskammern mit radioaktiver Kompensation. Eine ausführliche Beschreibung dieser Kammern ist bereits veröffentlicht [1]. Die Daten sind: Meßvolumen 21 l, Füllung N_2 mit 22 atm, Abschirmung 140 g/cm², Kompensation mit γ-Strahlung in getrennter 0,2 l-Kammer. Die örtliche Lage ist $h = 100$ m über N.N., $\varphi = 51^\circ\,29'$ N, $\lambda = 11^\circ\,58'$ E geographisch und $\varphi = 51{,}5^\circ$ N, $\lambda = 97^\circ$ E geomagnetisch.

Abb. 1 gibt eine Übersicht über die Aufstellung der Kammern. Die Kammern 1 und 2 [im Text K(1+2)] stehen im Dachgeschoß des Physikalischen Institutes in einem Abstand von 3 m. Sie registrieren die Strahlung in der üblichen Weise. Ihre Ergebnisse werden bei der Auswertung zusammengefaßt. Die Kammer K 3 steht in einem 10 m tiefen und 3 m weiten Schacht, der im Zenit einen Kegel mit einem Öffnungswinkel von etwa 17° ausblendet. Der Bau des Schachtes erfolgte vor allem zur Untersuchung der sonnenzeitlichen und sternzeitlichen Periode. Die Kammer K 4 befindet sich in einem seitlichen Stollen unter einer mittleren Erdschicht von 7 m, entsprechend 14 m Wasseräquivalent. Die Ionisationsströme werden um einige Prozent überkompensiert,

* Halle (Saale), Friedemann-Bach-Platz 6.

[1] W. MESSERSCHMIDT, Exp. Techn. Phys. **6**, 145 [1958].